E C A M L Y O N CONCOURS D'ADMISSION 1987

MATHEMATIQUE

Il est rappelé aux candidats qu'ils doivent donner des démonstrations claires, concises et rigoureuses et énoncer ou citer de manière suffisamment explicite les théorèmes utilisés. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération.

L'épreuve comporte quatre exercices totalement indépendants.

I. On considère, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction f définie par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+a}$
où a est un réel, n'appartenant pas à $-\mathbb{N}$.

1°/ Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2°/ a- Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $]-1 \quad +1[$

b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\forall x \in [0 \quad 1])\ \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^k}{k+a} \right| \leqslant \frac{1}{n+a}$

Montrer que f est continue en 1.

c- Montrer que f vérifie sur $]-1 \quad +1[$ une équation différentielle (E) que l'on précisera.
En déduire que f est dérivable en 1.

3°/ On supposera $a > 0$.

a- En intégrant l'équation différentielle (E) donner une expression de f sur $]-1 \quad 0[$ et sur $]0 \quad 1]$ sous forme d'intégrale.

b- Montrer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+a} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt$

II. On veut calculer $I = \iiint_D (2x + 3y + 6z)^2\,dxdydz$ avec

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ \frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{4a^2} + \frac{z^2}{a^2} \leqslant 1\right\} \text{ où } a \in \mathbb{R}_+^*$$

Pour $k \in \mathbb{R}_+$, on pose $D_k = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big/ 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 \leqslant k^2\right\}$
et l'on considère l'application :

$$F : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$k \longrightarrow \iiint_{D_k} (4x^2 + 9y^2 + 36z^2)\,dxdydz$$

1°/ Montrer : $I = F(6a)$

2°/ Calculer le volume de D_k.

3°/ POur $(k, k_0) \in \mathbb{R}_+^2$, encadrer $F(k) - F(k_0)$. En déduire que F est dérivable et donner F'.

4°/ Déduire de ce qui précède la valeur de I.

5°/ Retrouver I en effectuant un changement de variables.

Tournez la page S.V.P.

III.

1°/ Etudier la convergence des intégrales $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos\theta}{\theta}\, d\theta$.

On admettra que $I = \frac{\pi}{2}$

2°/ $u \in \mathbb{R}$. Calculer $J(u) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u\theta)}{\theta}\, d\theta$

3°/ $k \in \mathbb{R}_+$. Etudier la convergence des intégrales suivantes et les calculer :

$$S(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\theta} \sin k\theta\, d\theta \qquad C(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\theta}{\theta} \cos k\theta\, d\theta$$

4°/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par E_n l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$t \longrightarrow a_0 + \sum_{p=1}^{n} a_p \cos pt + b_p \sin pt$$

On considère $u \in]0 \quad n[\quad \setminus \mathbb{N}$.

A tout élément g de E_n on associe G définie par :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u\,(t-u)}{\pi\,(t-u)}\, g(u)\, du$$

On pose aussi : $H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin uv}{\pi v}\, g(t-v)\, dv$

Montrer que cette dernière intégrale est convergente.

En déduire la convergence de l'intégrale définissant G(t) et l'égalité $G(t) = H(t)$.

5°/ Montrer que $G \in E_n$. Montrer que l'application :

$$\begin{cases} E_n \longrightarrow E_n \\ g \longrightarrow G \end{cases}$$

est linéaire et donner sa matrice sur la base :

$$B = \left\{ (t \mapsto 1), (t \mapsto \sin t), (t \mapsto \cos t), \ldots, (t \mapsto \sin nt), (t \mapsto \cos nt) \right\}$$

IV. On considère l'espace vectoriel E des applications continues de $[0 \quad 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire :

$$E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f,g) \longrightarrow \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

On désigne par P le sous-espace vectoriel de E des applications polynômes de $[0 \quad 1]$ dans $\mathbb{R}$, par F le sous-espace vectoriel des applications, éléments de E, vérifiant $f(0) = 0$, par G le plan vectoriel engendré par les restrictions à $[0 \quad 1]$ des applications $t \longrightarrow \sqrt{2} \sin \pi t$ et $t \longrightarrow \sqrt{2} \cos \pi t$

1°/ Déterminer l'unique élément g_* de G tel que :

$$\int_0^1 (g_*(t) - t)^2\, dt \qquad \text{soit minimal}$$

2°/ a- Montrer que si $f \in F^{\perp}$ alors $f^2 \in F^{\perp}$

b- On considère la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E obtenue en posant
$(\forall t \in [0 \quad 1]) \quad g_n(t) = \inf(1, nt)$
Calculer $\langle f^2 | g_n \rangle$ et montrer que si $f \in F^{\perp}$ alors $f = 0$. Que constate-t-on pour F et $F^{\perp}$?

3°/ On admettra que toute fonction f de E est limite uniforme d'une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de P. Montrer que la convergence uniforme de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f entraîne la convergence dans E au sens de la norme associée au produit scalaire. En déduire que si $f \in E \setminus P$ il n'existe pas d'élément p de P tel que $\int_0^1 (p(t) - f(t))^2\, dt$ soit minimale.